Formalny szereg Fouriera to $S \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$. Mówimy, że S jest zbieżny w punkcie $x \in \mathbb{R}$ jeśli dla

$$S_k = \sum_{n=-k}^{k} c_n e^{inx}$$

ciąg liczb zespolonych $S_k(x)$ jest zbieżny.

Zauważmy, że e^{inx} jest funkcją okresową z okresem $\frac{2\pi}{n}$ dla $n \neq 0$ i jest funkcją stałą dla $n = 0$, zatem zbieżność szeregów Fouriera wystarczy badać na przedziale $[0; 2\pi]$, przy czym wartość na początku i na końcu tego przedziału jest taka sama. Przedział $[0; 2\pi]$ z utożsamionymi końcami będziemy oznaczać $\mathbb{T}$ i na ogół zmienne będziemy brać właśnie z $\mathbb{T}$.

Zbiór $U \subset \mathbb{T}$ jest zbiorem jednoznaczności, jeśli dla każdego szeregu $S \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, z faktu, że $S(x) \to 0$ dla $x \in \mathbb{T} \setminus U$ wynika, że $\forall_n \; c_n = 0$.

Dążymy do rekonstrukcji rozumowania Cantora z 1870 roku, dowodzącego, że $\emptyset$ jest zbiorem jednoznaczności.

Będą nam potrzebne trzy twierdzenia z kursowej analizy i analizy funkcjonalnej, które poniżej sformułuję bez dowodu (z odsyłaczami)

Lemat Riemanna-Lebesgue'a Jeśli $f \in L^1(\mathbb{T})$ to współczynniki Fouriera $\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ dążą do 0 przy $n \to +\infty$ i przy $n \to -\infty$. [W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona sekcja 5.14].

[O. Toeplitz, „Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Pr. Mat.-Fiz. t. XXII, 113-119]

Tw Toeplitza. Niech $\langle s_{kn} : k,n \in \mathbb{N} \rangle$ to dowolne liczby zespolone. Wtedy operator zdefiniowany wzorem

$$A(a_n) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_{kn} a_n$$

rozszerza zwykły operator granicy wtedy i tylko wtedy, gdy

1) $\lim_{k\to\infty} s_{kn} = 0$ dla każdego $n \in \omega$,
2) istnieje wspólna stała C t. że dla każdego $k \in \omega$ zachodzi $\sum_{n=0}^{\infty} |s_{kn}| \leq C$,
3) $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_{kn} = 1$.

Typowe zastosowanie:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{matrix} \qquad (a_n) \mapsto \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{k}$$

[Note de M. D.-Th. Égoroff, „Sur les suites de fonctions mesurables", Compt. Rend. Hebdomadaires, t. 152 (1911), 244–246

Niech $E \subset \mathbb{T}$, $f_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$

<u>Twierdzenie Egorova</u>. Jeśli $\mu(E) > 0$ i ciąg funkcji mierzalnych f_n zbiega do 0 w każdym punkcie $x \in E$, to $\forall_{\varepsilon > 0}$ istnieje $F \subset E$ mierzalny $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ t. że $f_n \rightrightarrows 0$ na zbiorze F.

Będzie nam także potrzebna następująca obserwacja rachunkowa:

$$\int_0^\infty \left| \left(\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \right)' \right| dx < \infty$$

$$\left(\left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \right)' = 2 \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\cos x\, x - \sin x}{x^2} = 2 \underbrace{\frac{\overbrace{\sin x \cdot \cos x}^{x \cdot \frac{1}{2}\sin 2x \sim \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \cdot x} \cdot x - \overbrace{\sin^2 x}^{x^2 - \frac{x^4}{3}}}{x^3}}_{\to 0}$$

Zatem dla małych x funkcja podcałkowa jest ograniczona, natomiast dla dużych funkcja podcałkowa jest majoryzowana przez $\frac{1}{x^2}$.

Dla szeregu formalnego $S \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ definiujemy funkcję Riemanna $F_S(x) = \frac{c_0 x^2}{2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx}$ dla $x \in \mathbb{R}$

ten ' oznacza że w sumie pomijamy 0

Funkcja F_S jest formalną dwukrotną całką szeregu S. Jeśli założymy, że współczynniki c_n są ograniczone, to funkcja F_S jest ciągła jako granica jednostajna szeregu funkcji ciągłych. Funkcja F_S odegra jeszcze pewną rolę w dalszym ciągu, w dowodzie charakteryzacji zb. jednoznaczności w terminach algebry $A(\mathbb{T})$ podanej przez I. Piatetskiego-Szapiro.

Definiujemy $\Delta^2 F(x,h) = F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)$ i drugą pochodną Schwartza F w punkcie x jako

$$D^2 F(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta^2 F(x,h)}{h^2}.$$

Obserwacja: jeśli $F''(x)$ istnieje to $F''(x)$ to także istnieje $D^2 F(x)$ oraz $F''(x) = D^2 F(x)$.

Pierwszy lemat Riemanna Załóżmy, że S jest formalnym szeregiem Fouriera z ograniczonymi współczynnikami i $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ zbiega w punkcie x do s. Wtedy $D^2 F_S(x)$ istnieje i $D^2 F_S(x) = s$.

Dw. Zaczniemy od obliczenia $\Delta^2 F_S(x,2h) = F_S(x+2h) + F_S(x-2h)$

$$- 2 F_S(x) = \frac{c_0(x+2h)^2}{2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{in(x+2h)}$$

$$+ \frac{c_0(x-2h)^2}{2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{in(x-2h)}$$

$$- 2\frac{c_0 x^2}{2} + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{c_n}{n^2} e^{inx} =$$

$$= \underbrace{\frac{c_0(2x^2+8h^2-2x^2)}{2}}_{4h^2 c_0} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} e^{inx} \underbrace{\left(2 - e^{in2h} - e^{-in2h}\right)}_{\substack{= 4\left(\frac{e^{inh} - e^{-inh}}{2i}\right)^2 \\ = 4(\sin nh)^2}}}_{= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n e^{inx} 4(\sin nh)^2}{n^2}}$$

Zatem
$$\frac{\Delta^2 F_S(x,2h)}{4h^2} = c_0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{c_n e^{inx} (\sin nh)^2}{(nh)^2} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n e^{inx} \sin^2 nh}{(nh)^2} = P_n(h)$$

Zatem wystarczy pokazać, że $\lim_{h \to 0} P_n(h) = s$

Wykażemy nieco ogólniejszy

Podlemat. Jeśli $\sum a_n = a$ to $\lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nh)}{(nh)^2} a_n = a$.

Dw. Niech $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\left(\frac{\sin(nh)}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)h}{(n+1)h}\right)^2\right)$.

Weźmy dowolny ciąg $h_k \to 0$, $h_k \geq 0$ i połóżmy.

$$s_{kn} = \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)h}{(n+1)h}\right)^2$$

Zostaje zatem do pokazania, że $\sum A_n s_{kn} \to a$ jest równe $\lim A_n$ i w tym celu zastosujemy tw. Toeplitza.

Warunek (1) mówi, że $s_{kn} \to 0$ przy $k \to +\infty$. Jednak mamy $\frac{\sin nh_k}{nh_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ ze względu na to, że $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Warunek (3) mówi, że $\sum_{n=0}^{\infty} s_{kn}$ musi zbiegać do 1. Jednak

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin(nh_k)}{nh_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)h_k}{(n+1)h_k}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin 1h_k}{h_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin 2h_k}{2h_k}\right)^2 +$$

$$\left(\left(\frac{\sin 2h_k}{2h_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin 3h_k}{3h_k}\right)^2\right) + \ldots + \left(\left(\frac{\sin(nh_k)}{nh_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)h_k}{(n+1)h_k}\right)^2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin 1 \cdot h_k}{h_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)h_k}{(n+1)h_k}\right)^2$$

$\downarrow$ 1 przy $k\to\infty$, ze względu na n jest stałe

przy $n \to \infty$ to jest $\sim \frac{\sin(n)}{n}$. Zatem $\lim \left(\frac{\sin(n+1)h_k}{(n+1)h_k}\right)^{2} = 0$

Pozostaje sprawdzić warunek (2), czyli $\sum_{n=1}^{\infty} |s_{k,n}| < \infty$

Mamy $\sum_{n=1}^{\infty} |s_{k,n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\sin(nh_k)}{nh_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)h_k}{(n+1)h_k}\right)^2 \right| =$

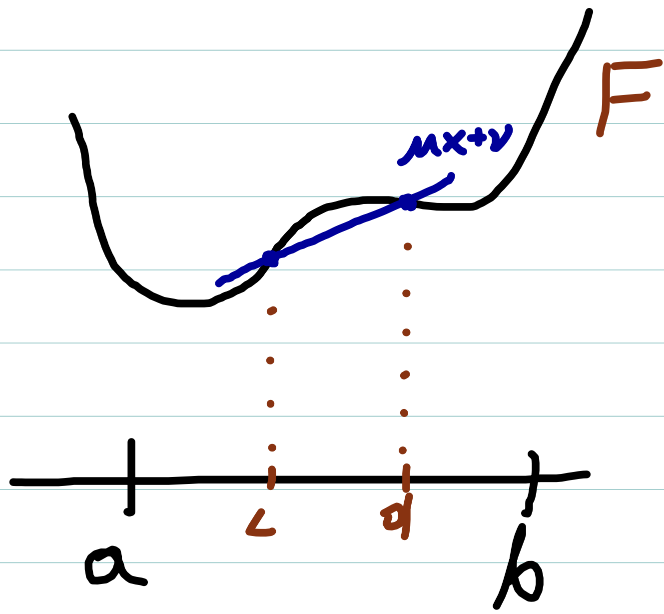
$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{nh_k}^{(n+1)h_k} u'(x)\,dx \right|$ gdzie $u(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

$\leq \int_{h_k}^{+\infty} |u'(x)|\,dx \leq \int_0^{\infty} |u'(x)|\,dx < +\infty$ ∎

Wykorzystujemy tutaj obliczenie ze strony 3.

Lemat (Schwarz) Załóżmy, że funkcja ciągła $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ spełnia $D^2F(x)\geq 0$ dla $x\in(a,b)$. Wtedy F jest wypukła na (a,b).

Dw. Możemy założyć, że $D^2F(x)>0$, przypuśćmy, że F nie jest wypukła



Zatem na przedziale c,d mamy $F(x)-(\mu x+\nu)>0$

Niech $x_0\in(c,d)$ realizuje $\sup F(x)-(\mu x+\nu)$ na $[c,d]$.

Wtedy $F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)\leq 0$, zatem

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\big(F(x_0+h)+F(x_0-h)-2F(x_0)\big)\leq 0$$

czyli $D^2F(x_0)\leq 0$, sprzeczność.

Pozostaje rozpatrzeć przypadek $D^2 F(x) \geq 0$. Przyp. że F nie jest wypukła. Wtedy istnieją c,d jak na rysunku. Bierzemy ε tak małe, żeby $\tilde{F}(x) = F(x) + \varepsilon x^2$ miało własność $\tilde{F}(x_0) > \mu x_0 + \nu$.

Niech x_1 - supremum $\tilde{F} - \mu x - \nu$ na $[c,d]$. Zatem $D^2(\tilde{F} - \mu x - \nu) = D^2 \tilde{F} = (D^2 F + 2\varepsilon)|_{x_1} \leq 0$, zatem $D^2 F|_{x_1} \leq -2\varepsilon$, sprzeczność z przypuszczeniem, że $D^2 F(x) \geq 0$ ■

Lemat Cantora-Lebesgue'a. Niech $S \sim \sum c_n e^{inx}$. Załóżmy, że na zbiorze miary dodatniej $E \subset \mathbb{T}$ zachodzi $S(x) \to 0$ dla każdego $x \in E$. Wtedy $c_n \to 0$ przy $n \to +\infty$ i przy $n \to -\infty$.

Dw. Definiujemy $A_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$. Skoro $S(x) \to 0$ to także $A_n(x) \to 0$ dla $x \in E$. Zatem z tw. Jegorowa istnieje $F \subset E$ t. że $A_n \rightrightarrows 0$ na F, $\mu F > 0$. W szczególności funkcja $A_n \chi_F \rightrightarrows 0$ na $\mathbb{T}$.

Załóżmy, że $\rho_n = (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)^{1/2}$ jest ciągiem granicznym. Wtedy mamy

$$|A_n(x)|^2 = A_n \cdot \overline{A_n} = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 + c_n \overline{c_{-n}} e^{2inx} + \overline{c_n} c_{-n} e^{-2inx}.$$

Zachodzi $$\int_0^{2\pi} A_n(x)\,dx = 2\pi(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) + \underbrace{\int_0^{2\pi} c_n \overline{c_{-n}} e^{2inx} + \overline{c_n} c_{-n} e^{-2inx}\,dx}_{=0}$$

Ponadto $\int_0^{2\pi} \chi_F |A_n(x)|^2 dx = p_n^2 \int_0^{2\pi} \chi_F \, dx + R_n$ $(*)$

gdzie $R_n = \left(\int_0^{2\pi} \chi_F e^{2inx} dx\right) c_n \overline{c_{-n}} + \left(\int_0^{2\pi} \chi_F e^{-2inx} dx\right) \overline{c_n} c_{-n}$

Skoro ciąg p_n jest ograniczony to też $|c_n \overline{c_{-n}}| \leq C$

$|\overline{c_n} c_n| \leq$

Z tw. Riemanna-Lebesgue'a mamy $\int_0^{2\pi} \chi_F e^{2inx} dx \to 0$ oraz $\int_0^{2\pi} \chi_F e^{-2inx} dx \to 0$ i z ograniczoności $|c_n \overline{c_n}|$ i $|\overline{c_n} c_n|$ wynika, że $R_n \to 0$.

Zatem $p_n^2 \to 0$ ze względu na równość $(*)$.

Pozostaje wyjaśnić dlaczego możemy założyć, że p_n jest ograniczone. Przypuśćmy, że p_n nie nie jest ograniczone.

Wtedy $p_{n_k} \geq C > 0$ dla pewnego podciągu.

Definiujemy $B_n(x) = 0$ dla $n \neq n_k$ i $B_{n_k}(x) = \frac{1}{p_{n_k}} A_{n_k}(x)$. Wtedy $B_n(x) \to 0$, ale „nowe p_n" już są ograniczone (przez 1). Zatem $p_{n_k} = \left(|c_{n_k}|^2 + |c_{-n_k}|^2\right)^{1/2}$ i $\tilde{p}_{n_k} = \left(\frac{|c_{n_k}|^2}{p_{n_k}^2} + \frac{|c_{-n_k}|^2}{p_{n_k}^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{p_{n_k}} \cdot p_{n_k} = 1$. Z powyższego rozumowania wynikałoby, że $\tilde{p}_n \to 0$, $\lightning$.

Tw (Cantora). Zbiór $\emptyset$ jest zbiorem jednoznaczności.

Dw. Niech $S \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, $S(x) \to 0$ dla każdego $x \in \mathbb{T}$. Chcemy wykazać, że $c_n = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$.

Z twierdzenia Cantora-Lebesgue'a ciąg c_n jest ograniczony. Zatem możemy zastosować lemat Riemanna i dostajemy $D^2 F_S(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{T}$, a co za tym idzie F_S jest funkcją wypukłą i wklęsłą, czyli $F_S(x) = ax + b$.

$$c_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx} = ax + b$$

Niech $H(x) = c_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2} c_n e^{inx} - ax - b$

Mamy $H \equiv 0$. Z drugiej strony

$$H(\pi) = c_0 \frac{\pi^2}{2} - \sum{}' \frac{1}{n^2} c_n \underbrace{e^{in\pi}}_{(-1)^n} - a\pi - b$$
$$H(-\pi) = c_0 \frac{\pi^2}{2} - \sum \frac{1}{n^2} c_n \underbrace{e^{-in\pi}}_{(-1)^{-n}} + a\pi - b$$

W szczególności $H(\pi) - H(-\pi) = -2a\pi$. Stąd $a = 0$.

Wiemy też, że $H(0) = H(2\pi)$

$$H(0) = c_0\frac{0^2}{2} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{in0} - b$$

$$H(2\pi) = c_0 2\pi^2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{in2\pi} - b.$$

(*) Zatem $c_0 = 0$. Dostajemy $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx} = b$

Niech $P_k = \sum_{n=-k}^{k}{}' \frac{1}{n^2} c_n e^{inx}$. Ze względu na jednostajną zbieżność $P_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} b$ mamy też $P_k e^{-imt} \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} b e^{-imt}$ dla każdego ustalonego $m \in \mathbb{Z}$.

Stąd $\int_0^{2\pi} P_k e^{-imt} dt \to \int_0^{2\pi} b e^{-imt} = \begin{cases} 2\pi b & \text{dla } m=0 \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$

dla $m=0$: $\int P_k = 0$

dla $m \neq 0$, $k > |m|$: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{m^2} c_m dt = \frac{1}{m^2} 2\pi c_m$

Stąd dla $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ mamy $c_m = 0$, zatem łącznie z poprzednią informacją (*) mamy $\forall m \in \mathbb{Z}$ $c_m = 0$.