1950 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 27 (69), N. 2

Строение максимальных идеалов в кольцах мер со сверткой

Ю. А. Шрейдер (Москва)

Предметом настоящей работы является изучение коммутативных нормированных колец, являющихся естественным обобщением кольца $V^{(b)}$ функций с ограниченным изменением на прямой, впервые рассматривавшегося И. М. Гельфандом (см. [2]). В работе решается вопрос о строении максимальных идеалов таких колец, в частности, впервые определяется структура максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$. Последний результат был уже изложен в моей заметке [10].

§ 1 посвящен определению рассматриваемого класса колец и установлению некоторых простейших его свойств.

В § 2 устанавливаются основные результаты, касающиеся строения максимальных идеалов в изучаемых кольцах.

§ 3 посвящен изучению кольца $V^{(b)}$. В нем дается некоторая конструкция максимальных идеалов этого кольца, с помощью которой можно установить существование максимальных идеалов, не укладывающихся в схему, указанную ранее Д. А. Райковым (см. [1], дополнение II).

В § 4 изучаются некоторые вопросы, связанные с топологическими свойствами пространства максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$. В качестве применения получается результат, высказанный в работе Винера (N. Wiener) и Питта (H. R. Pitt) [15] относительно преобразований Фурье-Стильтьеса функций с ограниченным изменением (теорема 8). Доказательство, данное в статье указанных авторов, очень громоздко и, повидимому, неверно.

§ 1. Введение

Пусть дана коммутативная топологическая группа $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Мы рассмотрим совокупность комплексных вполне аддитивных функций $\sigma(E)$, определенных для всех борелевских множеств на группе $\mathfrak{G}$.

Такие функции множеств мы будем в дальнейшем называть **м е р а м и**. Так как, очевидно, вещественная и мнимая части меры $\sigma(E)$ также являются вполне аддитивными мерами и имеют ограниченное изменение, то (см. [9], теорема 14.1) функция $\sigma(E)$ представима в виде:

$$\sigma(E) = \sigma_1(E) + i\sigma_2(E) - \sigma_3(E) - i\sigma_4(E), \tag{1}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ — неотрицательные вполне аддитивные функции множеств; при этом σ_1 сингулярна к σ_3, а σ_2 сингулярна к σ_4. И з м е н е -

нием меры σ на множестве E мы будем называть сумму изменений ее действительной и мнимой частей. Очевидно, что

$$\operatorname{var}_E \sigma = \sigma_1(E) + \sigma_2(E) + \sigma_3(E) + \sigma_4(E). \tag{2}$$

Мера σ называется абсолютно непрерывной относительно меры σ_0 или подчиненной к σ_0, если для всякого множества E, на котором изменение σ_0 равно нулю, изменение σ также равно нулю.

Если мера $\varphi(E)$ — неотрицательная, то можно для любого множества $\mathcal{E} \subset \mathfrak{G}$ ввести понятие верхней и нижней меры относительно φ следующим образом:

$$\overline{\varphi}(\mathcal{E}) = \inf \varphi(E), \qquad E \supset \mathcal{E}, \tag{3}$$

$$\underline{\varphi}(\mathcal{E}) = \sup \varphi(E), \qquad E \subset \mathcal{E}, \tag{3'}$$

где inf (sup) берется по всем борелевским множествам, содержащим $\mathcal{E}$ (содержащимся в $\mathcal{E}$). Если $\overline{\varphi}(\mathcal{E}) = \underline{\varphi}(\mathcal{E})$, то множество $\mathcal{E}$ называется измеримым относительно φ. В случае произвольной меры σ, множество $\mathcal{E}$ называется измеримым относительно σ, если $\mathcal{E}$ измеримо относительно каждой из мер $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, участвующих в равенстве (1). Значение $\sigma(\mathcal{E})$ определяется естественным образом.

Совокупность мер на группе $\mathfrak{G}$ превращается в банахово пространство $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$, если в качестве нормы меры принять ее полную вариацию.

Мы укажем сейчас общий вид линейного функционала в пространстве $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$. Для случая прямой это было сделано Ю. И. Гросбергом [16] и А. П. Артеменко [5], но и в этом случае указанный здесь вид линейного функционала, повидимому, удобнее для пользования.

Определение 1. Обобщенной функцией $f_\sigma(t)$ называется такая функция от точки $t \in \mathfrak{G}$ и меры σ, которая для каждой меры σ является измеримой относительно σ функцией от t, причем, если мера σ абсолютно непрерывна относительно меры σ_1, то почти всюду по мере σ выполнено равенство $f_\sigma(t) = f_{\sigma_1}(t)$.

Теорема 1. *Всякий линейный функционал $L\{\sigma\}$ в пространстве $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ задается формулой*:

$$L\{\sigma\} = \int f_\sigma(t)\, d_t\sigma, \tag{4}$$

где $f_\sigma(t)$ — некоторая обобщенная функция, удовлетворяющая условию:

$$\sup_\sigma \operatorname{vrai} \max_t |f_\sigma(t)| \equiv \|L\| < +\infty. \tag{5}$$

Обратно, всякая обобщенная функция, удовлетворяющая условию (5), *определяет функционал в* $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $\mathfrak{R}_\sigma \subset \mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$, состоящее из всех мер φ, подчиненных к некоторой положительной мере σ.

Согласно теореме Радона-Никодима [9], пространство $\mathfrak{R}_\sigma$ изометрично пространству суммируемых функций относительно меры σ, в силу соотношений

$$\varphi(E) = \int_E g(t)\, d_t\sigma \tag{6}$$

и

$$\|\varphi\| = \int |g(t)|\, d_t\sigma. \tag{7}$$

Функционал L в пространстве $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ порождает функционал L' в пространстве $\mathfrak{R}_\sigma$. Но, как известно, всякий функционал в пространстве суммируемых функций по мере σ определяется измеримой по σ функцией $f_\sigma(t)$, имеющей конечный «истинный максимум», и норма функционала L' определяется как

$$\|L'\| = \operatorname{vrai}\max_t |f_\sigma(t)|. \tag{8}$$

Функция $f_\sigma(t)$ определена, таким образом, для всех положительных мер σ.

Для произвольной меры σ мы положим

$$f_\sigma(t) = f_{\tilde\sigma}(t), \tag{9}$$

где для каждого множества E мера $\tilde\sigma(E)$ определена как полное изменение меры σ на множестве E. Согласно построению, $f_\sigma(t)$ есть обобщенная функция, и линейный функционал $L\{\sigma\}$ определен равенством (4). Нетрудно также проверить, что выполняется условие (5).

Банахово пространство $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ превращается в коммутативное нормированное кольцо, если задать умножение (свертку) формулой:

$$\sigma * \psi(E) = \int \sigma(E-t)\, d_t\psi. \tag{10}$$

Эта формула имеет следующий смысл: мы рассматриваем меру сдвинутого множества $\sigma(E-t)$, как функцию точки t, и интегрируем по мере ψ; результат равен некоторой функции множества $\sigma * \psi(E)$.

Мы покажем, что *интеграл* (10) *существует для всякого борелевского множества E и умножение, задаваемое формулой* (10), *коммутативно.*

Благодаря соотношению (1), наше утверждение достаточно доказать лишь для неотрицательных мер σ и ψ.

Рассмотрим прямую сумму $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ с собою и зададим там меру как произведение мер $\sigma\times\psi$ (см. [9]). Элементами группы $\mathfrak{H}$ являются пары (t, s). Рассмотрим борелевское множество $E\subset\mathfrak{G}$. Множество $\mathscr{E}\subset\mathfrak{H}$, состоящее из пар (t, s), удовлетворяющих условию $t+s\in E$, является борелевским в $\mathfrak{H}$, а следовательно, измеримым по произведению мер $\sigma\times\psi$.

В самом деле, группа $\mathfrak{H}$ есть прямая сумма подгруппы $\mathfrak{H}_1$ пар вида $(z, 0)$ и подгруппы $\mathfrak{H}_2$ пар вида $(-s, s)$. Множество $\mathscr{E}$ состоит из всех элементов $(t, s) = (t+s, 0) + (-s, s)$, для которых проекция на $\mathfrak{H}_1$ принадлежит множеству E, т. е. $t+s \in E$, а проекция на $\mathfrak{H}_2$ произвольна Таким образом при указанном разложении группы $\mathfrak{H}$ на прямые слагаемые множество $\mathscr{E}$ оказывается прямой суммой двух борелевских множеств, т. е. борелевским множеством в $\mathfrak{H}$.

Вычислим теперь меру множества $\mathscr{E} \subset \mathfrak{H}$. Применяя теорему Фубини (см. [9], теорема (9.10)), мы получаем:

$$\iint\limits_{\mathscr{E}} d_t\sigma d_s\psi = \int\limits_{\mathfrak{G}} d_t\sigma \int\limits_{E-t} d_s\psi = \int\limits_{\mathfrak{G}} \psi(E-t)\, d_t\sigma; \tag{11}$$

таким образом, интеграл (10) имеет смысл. С другой стороны,

$$\iint\limits_{\mathscr{E}} d_t\sigma d_s\psi = \int\limits_{\mathfrak{G}} d_s\psi \int\limits_{E-s} d_t\sigma = \int\limits_{\mathfrak{G}} \sigma(E-s)\, d_s\psi, \tag{12}$$

что доказывает коммутативность умножения в $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$.

Нетрудно убедиться, что пространство $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ образует нормированное кольцо, т. е. выполняется обычное условие для нормы:

$$\|\sigma * \psi\| \leqslant \|\sigma\| \cdot \|\psi\|. \tag{13}$$

§ 2. Основные теоремы о строении максимальных идеалов

Мы займемся изучением максимальных идеалов в кольце $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$, введенном в предыдущем параграфе. В общей теории коммутативных нормированных колец (см. [1]) доказано, что фактор-кольцо такого кольца по максимальному идеалу есть тело комплексных чисел. Таким образом, наша задача сводится к изучению гомоморфизмов кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ в тело комплексных чисел.

Определение 2. Обобщенным характером называется обобщенная функция $\chi_\sigma(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\chi_\sigma(t)\chi_\sigma(s) = \chi_\sigma(t+s) \tag{14}$$

для всех пар, кроме, быть может, множества меры нуль относительно произведения мер $\sigma \times \sigma$, и условию:

$$\sup_\sigma \operatorname{vrai}\max_t |\chi_\sigma(t)| = 1. \tag{15}$$

Заметим, что из определения обобщенного характера отнюдь не следует существование такого множества $E \subset \mathfrak{G}$ полной меры по σ, чтобы равенство (14) имело место для всех точек t и s, принадлежащих множеству E.

Оказывается, всякому гомоморфизму M кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ в тело комплексных чисел соответствует обобщенный характер $\chi_\sigma(t)$, так что гомоморфизм M задается формулой:

$$M\{\sigma\} = \int \chi_\sigma(t)\, d_t\sigma. \tag{16}$$

В дальнейшем нам понадобятся две леммы, которые мы сейчас докажем.

Лемма 1. *Пусть σ и ψ — две меры из кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$, мера $\varphi = \sigma * \psi$ и $\alpha(t)$ — произвольная функция. Тогда имеет место равенство*

$$\int \alpha(z)\, d_z\varphi = \int\int \alpha(t+s)\, d_t\sigma\, d_s\psi, \tag{17}$$

причем существование интеграла в одной из частей равенства (17) *влечет за собой существование интеграла в другой части этого равенства.*

Доказательство. В силу формулы (1), достаточно рассматривать положительные меры σ и ψ. В этом случае их свертка φ также является положительной мерой.

Каждому множеству E на группе $\mathfrak{G}$ можно поставить в соответствие множество E' на прямой сумме $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}$, состоящее из всех пар (t, s), для которых сумма $t + s \in E$. В случае, когда множество E — борелевское, множество E', как указывалось уже в конце предыдущего параграфа, также является борелевским, а следовательно, измеримым по произведению мер $\sigma \times \psi$. Мы сейчас покажем, что для любого измеримого относительно меры φ множества A на группе $\mathfrak{G}$ соответствующее множество A' на прямой сумме $\mathfrak{G} + \mathfrak{G}$ измеримо по произведению мер $\sigma \times \psi$.

Нам достаточно доказать равенство

$$\inf (\sigma \times \psi)(B_1) = \sup (\sigma \times \psi)(C_1), \tag{18}$$

где нижняя грань берется по всем борелевским множествам $B_1 \supset A'$, а верхняя — по всем борелевским множествам $C_1 \subset A'$.

Так как множество A измеримо относительно φ, то, по определению,

$$\varphi(A) = \inf \varphi(E) = \sup \varphi(F), \tag{19}$$

где нижняя грань берется по всем борелевским множествам $E \supset A$ а верхняя грань — по всем борелевским множествам $F \subset A$. Равенство (19) в сочетании с формулой (11) дает:

$$\inf (\sigma \times \psi)(E') = \sup (\sigma \times \psi)(F'), \tag{20}$$

с другой стороны, имеем очевидные неравенства:

$$\inf (\sigma \times \psi)(E') \geqslant \inf (\sigma \times \psi)(B_1), \tag{21}$$

а также

$$\sup (\sigma \times \psi)(F') \leqslant \sup (\sigma \times \psi)(C_1). \tag{22}$$

Сопоставляя равенства (22), (20) и (21), мы получаем искомое равенство:

$$\inf (\sigma \times \psi)(B_1) = \sup (\sigma \times \psi)(C_1). \tag{23}$$

Таким образом, множество A', состоящее из пар (t, s), удовлетворяющих условию $t + s \in A$, измеримо относительно произведения мер

$\sigma \times \psi$. Обратно, если множество C' пар (t, s), таких, что $t+s \in C$, измеримо относительно меры $\sigma \times \psi$, то множество C измеримо относительно меры $\sigma * \psi = \varphi$ и $\varphi(C) = (\sigma \times \psi)(C')$. Этот факт непосредственно усматривается из применения теоремы Фубини к интегралу

$$\iint\limits_{C'} d_s\sigma\, d_t\psi = \int\limits_{\mathfrak{G}} d_s\sigma \int\limits_{C-s} d_t\psi = \int \psi(C-s)\, d_s\sigma. \tag{24}$$

Таким образом, суммы Лебега

$$\sum_{l=-N}^{+N} a_l \varphi(E\{a_l > \alpha(z) \geqslant a_{l-1}\}) \tag{25}$$

и

$$\sum_{l=-N}^{+N} a_l (\sigma \times \psi)(E'\{a_l > \alpha(t+s) \geqslant a_{l-1}\}), \tag{26}$$

определяющие оба интеграла в равенстве (17), совпадают, и, следовательно, пределы таких сумм существуют одновременно.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* σ_0, ψ_0, $\varphi_0 = \sigma_0 * \psi_0$ — *положительные функции множеств; пусть* σ *и* ψ *абсолютно непрерывны относительно* σ_0 *и, соответственно,* ψ_0. *Тогда мера* $\varphi = \sigma * \psi$ *абсолютно непрерывна относительно* φ_0.

Доказательство. Будем говорить, что функция множества $f(E)$ удовлетворяет относительно положительной функции множества $f_1(E)$ условию Липшица, если существует постоянная K такая, что для любого множества E, измеримого по f_1, имеет место неравенство

$$|f(E)| \leqslant K f_1(E), \tag{27}$$

причем множество E измеримо по мере f.

Из теоремы Никодима [9] и полноты пространства $\mathfrak{R}_{\sigma_1}$ легко можно вывести, что для того чтобы $\sigma(E)$ была абсолютно непрерывна относительно $\sigma_1(E)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность функций множеств, удовлетворяющих условию Липшица относительно $\sigma_1(E)$, сходящаяся по норме к $\sigma(E)$. В силу условия леммы, существуют две последовательности $\{\sigma_n\}$ и $\{\psi_n\}$, сходящиеся одна к σ, а другая к ψ и такие, что для любого борелевского множества E

$$|\sigma_n(E)| < K_n \sigma_0(E) \quad \text{и} \quad |\psi_n(E)| < K_n \psi_0(E);$$

тогда

$$|\sigma_n * \psi_n(E)| = \left| \int \sigma_n(E-t)\, d_t\psi_n \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int |\sigma_n(E-t)|\, d_t \operatorname{var} \psi_n \leqslant K_n^2 \int \sigma_0(E-t)\, d_t\psi_0. \tag{28}$$

Таким образом, для любого измеримого по φ_0 множества E

$$|\varphi_n(E)| = |\sigma_n * \psi_n(E)| \leqslant K_n^2 \varphi_0(E). \tag{29}$$

Так как

$$\|\sigma_n * \psi_n - \varphi\| \leqslant \|\sigma_n * \psi_n - \sigma_n * \psi\| + \|\sigma_n * \psi - \sigma * \psi\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\sigma_n\| \cdot \|\psi_n - \psi\| + \|\psi\| \cdot \|\sigma_n - \sigma\|,$$

то последовательность $\varphi_n = \sigma_n * \psi_n$ сходится по норме к φ; согласно сказанному выше, это значит, что φ абсолютно непрерывна относительно меры φ_0.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть $M\{\sigma\}$ — произвольный гомоморфизм кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ в тело комплексных чисел. Тогда существует обобщенный характер $\chi_\sigma(t)$, так что*

$$M\{\sigma\} = \int \chi_\sigma(t)\, d_t\sigma. \tag{30}$$

Обратно, для всякого обобщенного характера $\chi_\sigma(t)$ формула (30) *определяет некоторый гомоморфизм кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$.*

Доказательство. Согласно общей теории нормированных колец (см. [1] и [2]), гомоморфизм кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ в тело комплексных чисел является линейным функционалом с нормой, равной единице, и, следовательно, допускает представление вида:

$$M\{\sigma\} = \int \chi_\sigma(t)\, d_t\sigma. \tag{31}$$

Мы найдем сейчас необходимое и достаточное условие, которому надо подчинить обобщенную функцию $\chi_\sigma(t)$, чтобы эта формула определяла некоторой гомоморфизм кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$.

Заметим прежде всего, что так как для каждой меры $\sigma(E)$ существует положительная мера $\tilde{\sigma}(E)$ (например, полная вариация меры σ на множестве E), относительно которой σ абсолютно непрерывна, и так как почти всюду по σ $\chi_\sigma(t) = \chi_{\tilde{\sigma}}(t)$, то достаточно искать условие, которому должна удовлетворять обобщенная функция $\chi_\sigma(t)$, считая меру σ положительной.

Пусть меры σ_0 и ψ_0 положительны, а σ и ψ, соответственно, абсолютно непрерывны относительно них. Согласно лемме 2, свертка $\sigma * \psi = \varphi$ абсолютно непрерывна относительно меры $\varphi_0 = \sigma_0 * \psi_0$. По определению гомоморфизма имеем:

$$M\{\varphi\} = M\{\sigma\}\, M\{\psi\} \tag{32}$$

или, в развернутом виде,

$$\int \chi_{\varphi_0}(t)\, d_t\varphi = \int \chi_{\sigma_0}(s)\, d_s\sigma \cdot \int \chi_{\psi_0}(z)\, d_z\psi\, ^*. \tag{33}$$

---

* Так как почти всюду $\chi_{\varphi_0}(t) = \chi_\varphi(t)$, $\chi_{\sigma_0}(s) = \chi_\sigma(s)$, $\chi_{\psi_0}(z) = \chi_\psi(z)$.

Применяя к правой части теорему Фубини, а к левой — лемму 1, получаем:

$$\int\int \chi_{\varphi_0}(t+s)\, d_s\sigma\, d_t\psi = \int\int \chi_{\sigma_0}(s)\,\chi_{\psi_0}(t)\, d_s\sigma\, d_t\varphi. \tag{34}$$

Так как равенство (34) справедливо для любых σ и ψ, абсолютно непрерывных относительно σ_0 и ψ_0, то почти всюду по произведению мер $\sigma_0 \times \psi_0$

$$\chi_{\varphi_0}(s+t) = \chi_{\sigma_0}(s)\,\chi_{\psi_0}(t). \tag{35}$$

Рассмотрим теперь произвольную положительную меру σ_1 и определим меру $\mathfrak{F}$ равенством:

$$\mathfrak{F} = \exp\sigma_1 = e + \sigma_1 + \frac{1}{2!}\sigma_1 * \sigma_1 + \cdots, \tag{36}$$

где e — единица кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$. Ясно, что меры $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} * \mathfrak{F}$ абсолютно непрерывны друг относительно друга. Положим в равенстве (35) $\sigma_0 = \psi_0 = \mathfrak{F}$, тогда

$$\chi_{\mathfrak{F}}(t+s) = \chi_{\mathfrak{F}}(t)\,\chi_{\mathfrak{F}}(s). \tag{38}$$

Так так σ_1 абсолютно непрерывна относительно $\mathfrak{F}$, то для почти всех пар (t, s)

$$\chi_{\sigma_1}(t+s) = \chi_{\sigma_1}(t)\,\chi_{\sigma_1}(s). \tag{38}$$

Таким образом, мы пришли к нужному функциональному уравнению для обобщенного характера.

Обратно, всякий обобщенный характер порождает некоторый гомоморфизм кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$. Действительно, нужно лишь проверить, что свертке мер соответствует произведение интегралов типа (31). Но из уравнения (14) для обобщенного характера легко вывести условие (35), а тогда, по лемме 1,

$$\int \chi_{\varphi_0}(z)\, d_z\varphi_0 = \int\int \chi_{\varphi_0}(t+s)\, d_t\sigma_0\, d_s\psi_0 = \int\int \chi_{\sigma_0}(t)\,\chi_{\psi_0}(s)\, d_t\sigma_0\, d_s\psi_0 =$$
$$= \int \chi_{\sigma_0}(t)\, d_t\sigma_0 \cdot \int \chi_{\psi_0}(s)\, d_s\psi_0. \tag{39}$$

Условие

$$\sup_{\sigma}\ \operatorname{vrai}\ \max_{t}\ |\chi_\sigma(t)| = 1$$

получается из того, что норма соответствующего функционала равна единице, как это следует из общей теории [1].

Теорема доказана.

Естественно было бы предположить, что утверждение теоремы можно усилить, например, следующим образом:

Для всякой меры σ найдется такой характер, т. е. функция $\chi(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\chi(t+s) = \chi(t)\,\chi(s), \tag{41}$$

что почти всюду по σ обобщенный характер $\chi_\sigma(t) = \chi(t)$,

Можно построить пример, показывающий, что это утверждение неверно.

Теорема 3. *Пусть $\chi_\sigma(t)$ — обобщенный характер, тогда совокупность тех мер σ, для которых $\chi_\sigma(t)=0$ почти всюду по σ, образует идеал $I\subset\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$, а те меры ψ, для которых $\chi_\psi(t)$ отличен от нуля почти всюду относительно ψ, образуют подкольцо $\mathfrak{R}$ кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$.*

Доказательство. Ясно, что совокупность мер I, для которых обобщенный характер $\chi_\sigma(t)=0$ почти всюду по σ, образует подпространство кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$. То же можно сказать про совокупность мер $\mathfrak{R}$, для которых $\chi_\psi(t)$ почти всюду по ψ отличен от нуля. Покажем, что I есть идеал в $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$.

Пусть $\varphi=\sigma*f$; тогда для всякого множества E, согласно лемме 1 и теореме 2, имеем:

$$\int\limits_E\chi_\varphi(z)\,d_z\varphi=\iint\limits_{t+s\in E}\chi_\varphi(t+s)\,d_t\sigma\,d_sf=\iint\limits_{t+s\in E}\chi_\sigma(t)\,\chi_f(s)\,d_t\sigma\,d_sf=$$
$$=\int d_sf\int\limits_{E-s}\chi_\sigma(t)\,\chi_f(s)\,d_t\sigma=0, \tag{42}$$

так как $\chi_\sigma(t)=0$. Отсюда следует, что

$$\chi_\varphi(t)=0,\ \text{т. е. } \varphi\in I.$$

Предположим, что почти всюду относительно меры ψ $\chi_\psi(t)$ отличен от нуля и почти всюду относительно меры ψ_1 $\chi_{\psi_1}(t)\neq0$; тогда, если бы выполнялось равенство $\chi_f(t)=0$ для всех точек множества E, имеющего ненулевую меру относительно $f=\psi*\psi_1$, то мы пришли бы к противоречию. В самом деле, будем считать меры ψ и ψ_1 положительными (иначе мы могли бы рассматривать их полные вариации, отчего значения обобщенного характера остались бы прежними). Тогда для любых мер φ_1 и φ, абсолютно непрерывных, соответственно, относительно ψ_1 и ψ, мы получаем, по лемме 2, что $f_1=\varphi_1*\varphi$ абсолютно непрерывна относительно меры f и, по сделанному предположению,

$$\int\limits_E\chi_f(t)\,d_tf_1=0, \tag{43}$$

но из формулы (42) следует равенство

$$\iint\limits_{t+s\in E}\chi_{\psi_1}(t)\,\chi_\psi(s)\,d_t\varphi_1\,d_s\varphi=0. \tag{44}$$

Таким образом, произведение $\chi_{\psi_1}(t)\,\chi_\psi(s)=0$ на некотором множестве ненулевой меры по произведению мер $\psi_1\times\psi$. Следовательно, хотя бы один из сомножителей (пусть, для определенности, это $\chi_\psi(s)$) равен нулю на множестве E_1 ненулевой меры по $\psi_1\times\psi$. Отсюда следует, что $\chi_\psi(s)=0$, когда $s\in E_1$, такому, что $\psi(E_1)\neq0$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Установим ряд простых свойств построенных идеала и подкольца.

1) Идеал I и подкольцо $\mathfrak{R}$ взаимно сингулярны. Это значит, что если $\sigma\in I$ и $\psi\in\mathfrak{R}$, то меры σ и ψ сингулярны, т. е. существует боре-

левское множество $E \subset \mathfrak{G}$, такое, что изменение σ на E равно нулю, а изменение ψ равно нулю на дополнении к E.

Действительно, в противном случае существовала бы отличная от нуля функция множеств σ_1, абсолютно непрерывная как относительно σ, так и относительно ψ. Тогда, с одной стороны, почти всюду $\chi_{\sigma_1}(t) = \chi_\sigma(t) = 0$, а с другой стороны, $\chi_{\sigma_1}(t) = \chi_\psi(t)$ почти всюду отличен от нуля. Это противоречие убеждает нас в справедливости первоначального утверждения.

2) Всякая вполне аддитивная функция множества однозначно представима в виде суммы $\sigma = \sigma_I + \sigma_{\mathfrak{R}}$, где $\sigma_I \in I$, $\sigma_{\mathfrak{R}} \in \mathfrak{R}$.

Для доказательства рассмотрим обобщенный характер $\chi_\sigma(t)$. Обозначим через E_I множество тех точек t, для которых $\chi_\sigma(t) = 0$, а через $E_{\mathfrak{R}}$ — дополнение к E_I. Обозначим, далее, через $\lambda_I(t)$ характеристическую функцию множества E_I. Ясно, что мера

$$\sigma_I(E) = \int_E \lambda_I(t)\, d_t \sigma$$

принадлежит идеалу I, а мера

$$\sigma_{\mathfrak{R}}(E) = \int_E [1 - \lambda_I(t)]\, d_t \sigma$$

принадлежит подкольцу $\mathfrak{R}$. Кроме того,

$$\sigma_I + \sigma_{\mathfrak{R}} = \sigma.$$

Однозначность такого представления следует из доказанной сингулярности идеала и подкольца.

3) Мера, сосредоточенная в точке, лежит в подкольце $\mathfrak{R}$.

Обозначим через σ_t единичную меру, сосредоточенную в точке t, тогда $\sigma_t * \sigma_{-t} = \sigma_0$; но мера σ_0 есть единица кольца, следовательно, элемент кольца σ_t имеет обратный в кольце $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ и, значит, не может содержаться ни в каком идеале, отличном от всего кольца $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$. Так как идеал I заведомо не совпадает со всем кольцом $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$, то, стало быть, $\sigma_t \overline{\in} I$. Положим $\sigma_t = \sigma_I + \sigma_{\mathfrak{R}}$; по доказанному выше, $\sigma_{\mathfrak{R}} \neq 0$, но так как $\sigma_{\mathfrak{R}}$ абсолютно непрерывна относительно σ_t, то $\sigma_{\mathfrak{R}} = \lambda \sigma_t$, а следовательно, мера $\sigma_t = \lambda^{-1} \sigma_{\mathfrak{R}}$ входит в подкольцо $\mathfrak{R}$.

4) Вместе с каждой мерой $\sigma(E)$ как в подкольцо $\mathfrak{R}$, так и в идеал I входят все «сдвинутые» меры $\sigma(E - t)$.

Это утверждение следует из только что доказанного свойства, так как

$$\sigma(E - t) = \sigma_t * \sigma(E), \tag{45}$$

где σ_t есть единичная мера, сосредоточенная в точке t.

§ 3. Новая конструкция максимальных идеалов для случая, когда группа $\mathfrak{G}$ изоморфна прямой

В том случае, когда группа $\mathfrak{G}$ изоморфна обычной прямой, рассматриваемое нами кольцо совпадает с кольцом $V^{(b)}$, изучавшимся ранее И. М. Гельфандом [1] и Д. А. Райковым. Наиболее общий известный до сих пор класс максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$ был указан Д. А. Райковым [1].

Мы покажем, что данная Д. А. Райковым конструкция не охватывает всех максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$. Кроме того, мы покажем в этом параграфе, что кольцо $V^{(b)}$ несимметрично.

Напомним конструкцию гомоморфизмов кольца $V^{(b)}$, предложенную Д. А. Райковым.

Назовем систему $\mathfrak{F}$ борелевских множеств E_α регулярной, если:

1) вместе с каждым множеством E в $\mathfrak{F}$ входят все его подмножества типа F_σ;

2) вместе с каждой счетной совокупностью множеств $E_1, E_2, \ldots$ в $\mathfrak{F}$ входит теоретико-множественная сумма $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ этих множеств;

3) вместе с любыми двумя множествами E_α и E_β в $\mathfrak{F}$ входит их арифметическая сумма $E_\alpha + E_\beta$;

4) система $\mathfrak{F}$ содержит все счетные множества.

Вполне аддитивная функция множества σ называется сосредоточенной на системе $\mathfrak{F}$, если в систему $\mathfrak{F}$ входит множество E, имеющее полную меру относительно σ. Соответственно будем говорить, что вполне аддитивная функция множеств ψ сосредоточена вне системы $\mathfrak{F}$, если для любого множества E, входящего в систему $\mathfrak{F}$, значение $\psi(E) = 0$.

Всякая мера φ представима в виде $\varphi = \varphi_I + \varphi_{\mathfrak{R}}$, где $\varphi_{\mathfrak{R}}$ сосредоточена на системе $\mathfrak{F}$, а φ_I — вне ее. Назовем $\varphi_{\mathfrak{R}}$ проекцией меры φ на систему $\mathfrak{F}$.

Д. А. Райков показал, что меры, сосредоточенные на системе $\mathfrak{F}$, образуют подкольцо $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}$ кольца $V^{(b)}$, а меры, сосредоточенные вне системы $\mathfrak{F}$, образуют идеал $I_{\mathfrak{F}}$ кольца $V^{(b)}$.

На этом факте основывается следующая конструкция гомоморфизмов кольца $V^{(b)}$ в тело комплексных чисел. Пусть $\chi(t)$ — характер прямой, измеримый относительно всех мер, сосредоточенных на $\mathfrak{F}$. Формула

$$M\{\sigma\} = \int \chi(t)\, d_t \sigma_{\mathfrak{R}} \tag{46}$$

задает гомоморфизм кольца $V^{(b)}$.

Действительно, достаточно лишь проверить мультипликативность функционала (46). Для $\psi = \sigma * \varphi$ имеем:

$$\int \chi(t)\, d_t \sigma_{\mathfrak{R}} \cdot \int \chi(s)\, d_s \varphi_{\mathfrak{R}} = \int\int \chi(t+s)\, d_t \sigma_{\mathfrak{R}}\, d_s \varphi_{\mathfrak{R}} = \\ = \int \chi(z)\, d_z (\sigma_{\mathfrak{R}} * \varphi_{\mathfrak{R}}). \tag{47}$$

Но так как меры, сосредоточенные вне $\mathfrak{F}$, образуют идеал, то $\sigma_{\mathfrak{R}} * \varphi_{\mathfrak{R}} = \psi_{\mathfrak{R}}$, следовательно,

$$\int \chi(t)\, d_t \sigma_{\mathfrak{R}} \cdot \int \chi(s)\, d_s \varphi_{\mathfrak{R}} = \int \chi(z)\, d_z \psi_{\mathfrak{R}}. \tag{48}$$

Мы сейчас покажем, что существуют разбиения кольца $V^{(b)}$ в полупрямую сумму попарно сингулярных подкольца $\mathfrak{R}$ и идеала I, не охватываемые вышеизложенной схемой Райкова.

Предлагаемая нами конструкция, которая, конечно, может быть перенесена на более общий класс групп, состоит в следующем.

Пусть дана совокупность H характеров прямой, т. е. функций $\chi(t)$, удовлетворяющих для всех t и s условиям

$$\chi(t+s)=\chi(t)\chi(s) \tag{49}$$

и

$$|\chi(t)|=1. \tag{50}$$

Обозначим через $\mathfrak{R}_H$ совокупность всех мер σ, по которым любой характер из H является измеримым. Пусть, далее, подпространство $I_H \subset V^{(b)}$ состоит из мер, сингулярных к любой мере, входящей в $\mathfrak{R}_H$. Тогда имеет место

Теорема 4. *Совокупность мер $\mathfrak{R}_H$ образует подкольцо кольца $V^{(b)}$, а совокупность I_H является идеалом в кольце $V^{(b)}$.*

Доказательство. Легко видеть, что $\mathfrak{R}_H$ образует линейное подпространство кольца $V^{(b)}$ и что $\mathfrak{R}_H$ вместе с каждой мерой σ содержит все меры, абсолютно непрерывные относительно σ. Покажем, что вместе с мерами σ и φ в $\mathfrak{R}_H$ входит их свертка $\psi=\sigma*\varphi$.

Пусть характер χ входит в H, в этом случае имеют смысл интегралы

$$\int\chi(t)\,d_t\sigma \quad\text{и}\quad \int\chi(s)\,d_s\varphi.$$

Но, по теореме Фубини,

$$\int\chi(t)\,d_t\sigma\int\chi(s)\,d_s\varphi=\iint\chi(t+s)\,d_t\sigma\,d_s\varphi, \tag{51}$$

а согласно лемме 1

$$\iint\chi(t+s)\,d_t\sigma\,d_s\varphi=\int\chi(z)\,d_z\psi, \tag{52}$$

и характер $\chi(z)$ измерим по мере ψ. Так как $\chi(z)$ — произвольный характер, лежащий в совокупности H, то наше рассуждение показывает, что $\psi\in\mathfrak{R}_H$, т. е. $\mathfrak{R}_H$ является подкольцом кольца $V^{(b)}$.

Покажем, что сингулярное дополнение к $\mathfrak{R}_H$ есть идеал. Рассмотрим произвольную меру $\sigma_0\in I_H$. Для любой меры σ, абсолютно непрерывной по отношению к σ_0, существует (вообще говоря, свой) характер $\chi\in H$, не измеримый по σ.

Докажем сначала что всякая мера $\sigma_0\in I_H$ представима в виде счетной суммы попарно сингулярных мер: $\sigma_0=\Sigma\sigma_j$, где для каждой меры σ_j существует характер $\chi_j'(t)\in H$, не измеримый по всем мерам σ_j^α, абсолютно непрерывным относительно σ_j. Это достаточно доказать для положительных мер. Воспользуемся теперь следующей леммой:

Лемма 3. *Пусть $\psi(E)$ — положительная мера, а $f(t)$ — произвольная функция на прямой. Определим меру $\psi_f(E)$ следующим образом:*

$$\psi_f(E) = \sup_{F \subset E} \psi(F), \tag{53}$$

где верхняя грань берется по всем замкнутым множествам, содержащимся в E, на которых функция $f(t)$ непрерывна. Тогда функция $f(t)$ измерима по мере ψ_f и не измерима относительно любой меры, подчиненной к $\psi - \psi_f = \widetilde{\psi}_f$.

Доказательство леммы. Из определения меры ψ_f следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество F_ε, на котором функция $f(t)$ непрерывна и для которого $\psi_f(F_\varepsilon) \geqslant \|\psi_f\| - \varepsilon$. Следовательно, по теореме Лузина (см. [9], стр. 112), функция $f(t)$ измерима относительно меры ψ_f.

Рассмотрим положительную меру σ, подчиненную к $\widetilde{\psi}_f$. Если бы функция $f(t)$ была измерима относительно σ, то для всякого $\varepsilon > 0$ существовало бы, согласно той же теореме Лузина, замкнутое множество F_1, на котором $f(t)$ непрерывна и для которого $\sigma(F_1) > \|\sigma\| - \varepsilon$. Выбрав $\varepsilon = \frac{1}{2}\|\sigma\|$, мы бы получили замкнутое множество положительной меры по σ, на котором функция $f(t)$ непрерывна. Но, с другой стороны, для всякого такого множества $\widetilde{\psi}_f(F_1) = 0$, следовательно, и $\sigma(F_1) = 0$.

Следствие. *Для того чтобы функция $f(t)$ была измерима по мере ψ, необходимо и достаточно, чтобы меры ψ и ψ_f совпадали.*

Вернемся к доказательству теоремы 4. Мы будем проводить трансфинитную индукцию.

В силу условия $\sigma_0 \in I_H$, существует характер $\chi_1 \in H$, не измеримый относительно σ_0. Согласно лемме 3, мера $\sigma_1 = (\widetilde{\sigma_0})_{\chi_1}$ отлична от нуля. Пусть меры σ_ω определены для всех трансфинитов $\omega < \omega_0$, где ω_0 — фиксированный трансфинит. Меры σ_ω абсолютно непрерывны относительно σ_0 и попарно сингулярны. Положим $\psi_{\omega_0} = \sigma_0 - \sum_{\omega<\omega_0} \sigma_\omega$; ясно, что $\psi_{\omega_0} \in I_H$. По предположению, существует характер $\chi \in H$, не измеримый относительно ψ_{ω_0}. Мы обозначим через σ_{ω_0} разность $\psi_{\omega_0} - (\psi_{\omega_0})_\chi = \sigma_{\omega_0}$. Так как все меры σ_{ω_0} абсолютно непрерывны относительно σ и попарно сингулярны, то, начиная с некоторого счетного трансфинита, все σ_ω, будут равны нулю, и мы получим:

$$\sigma_0 = \sum_{\omega < \widetilde{\omega}} \sigma_\omega = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j, \tag{54}$$

причем для каждой меры σ_ω существует характер $\chi_\omega \in H$, не измеримый по любой мере σ_ω^α, абсолютно непрерывной относительно меры σ_ω.

Пусть ψ — любая положительная мера. Докажем, что свертка $\sigma_0 * \psi$ принадлежит подпространству I_H. Достаточно показать, что $\sigma_\omega * \psi \in I_H$ для всех мер σ_ω, определенных выше. Это мы докажем следующим образом. Пусть E — борелевское множество, на котором характер $\chi_\omega(t)$

непрерывен, тогда этот характер непрерывен и на всех сдвинутых множествах вида $E - s$. Из определения меры σ_ω имеем: $\sigma_\omega(E - s) = 0$. Но тогда для свертки $\sigma_\omega * \psi$ получим:

$$\varphi(E) = \sigma_\omega * \psi(E) = \int \sigma_\omega(E - s)\, d_s \psi = 0. \tag{55}$$

Таким образом, для всякого множества E, на котором характер $\psi_\omega(t)$ непрерывен, $\varphi(E) = 0$. Следовательно, согласно доказанной лемме, характер χ_ω неизмерим относительно любой меры, подчиненной к свертке $\sigma_\omega * \psi$.

Мы доказали, таким образом, что $I_{\bar{H}}$ является идеалом кольца $V^{(b)}$ Теорема доказана.

Замечание. Теорема 4 дает нам некоторую конструкцию гомоморфизмов кольца $V^{(b)}$ в тело комплексных чисел.

Действительно, пусть $\chi \in H$, тогда формула

$$M\{\sigma\} = \int \chi(t)\, d_t \sigma_{\mathfrak{R}}, \tag{56}$$

где $\sigma_{\mathfrak{R}}$ означает проекцию меры σ на подкольцо $\mathfrak{R}_H$, определяет гомоморфизм кольца $V^{(b)}$ в тело комплексных чисел. *

Лемма 4. ** *Существует совершенное множество на прямой, каждая конечная совокупность точек которого является линейно независимой в поле рациональных чисел.*

Теорема 5. *Пусть σ — какая-то непрерывная**** *мера, сосредоточенная на совершенном множестве P с линейно независимыми точками и отличная от нуля. Обозначим через $H[\sigma]$ совокупность всех характеров, измеримых по этой мере. Рассмотрим, далее, соответствующее подкольцо $\mathfrak{R}_H$. Тогда, какова бы ни была регулярная система множеств $\mathfrak{F}$, совокупность мер, сосредоточенных на $\mathfrak{F}$, не совпадает с подкольцом $\mathfrak{R}_H$.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть подкольцо $\mathfrak{R}_H$ состоит из мер, сосредоточенных на некоторой регулярной системе $\mathfrak{F}$, а I_H состоит из мер, сосредоточенных вне этой системы. В таком случае существует борелевское множество $B \in \mathfrak{F}$ полной меры относительно σ. Так как в $\mathfrak{F}$ входят все подмножества множества B типа F_σ, то в $\mathfrak{R}_H$ входят все меры, сосредоточенные на множестве B. Покажем, что это ведет нас к противоречию.

Заметим сначала, что можно считать B содержащимся в множестве P. Действительно, пересечение PB имеет полную меру по σ, следовательно, внутри этого пересечения содержится множество B_1 типа F_σ, имеющее полную меру по σ. Так как $B_1 \subset B$, то множество B_1 принадлежит системе $\mathfrak{F}$. Ясно, что $B_1 \subset P$.

---

* Доказательство аналогично проведенному на стр. 307.

** Эта лемма доказана Нейманом (J. von Neumann) [17].

*** Мера σ называется непрерывной, если для всякого множества E, состоящего из одной точки, $\sigma(E) = 0$.

Мы докажем, что никакая непрерывная мера ψ, сингулярная к σ и сосредоточенная на P, не может лежать в подкольце $\mathfrak{R}_H$. Для этого мы построим характер $\chi(t)$, измеримый по мере σ и, следовательно, входящий в $H[\sigma]$, но не измеримый по мере ψ.

Разобьем множество P на сумму двух непересекающихся множеств P_σ и P_ψ, таких, что σ сосредоточена на P_σ, а ψ — на P_ψ. Это возможно, в силу попарной сингулярности мер σ и ψ. Пусть $\mathcal{E}$ — такое множество, что ни оно само, ни его дополнение $C\mathcal{E}$ не содержит ни одного совершенного множества (см. [7]). Функция $\chi(t)$, определенная на множестве P условием:

$$\chi(t)=\begin{cases} 1, & \text{если } t\in P_\sigma,\\ 1, & \text{если } t\in P_\psi\cap\mathcal{E},\\ -1, & \text{если } t\in P_\psi\cap C\mathcal{E},\end{cases}$$

и продолженная на всю прямую так, чтобы удовлетворялось равенство (49), является, очевидно, измеримой по мере σ, но не измеримой по мере ψ. Следовательно, мера ψ не входит в подкольцо $\mathfrak{R}_H$. С другой стороны, в силу несчетности множества P, на нем заведомо сосредоточены меры, сингулярные по отношению к мере σ, и все они, по предположению, должны принадлежать подкольцу $\mathfrak{R}_H$.

Полученное противоречие показывает, что подкольцо $\mathfrak{R}_H$ не совпадает с совокупностью мер, сосредоточенных на регулярной системе $\mathfrak{F}$.

Следствие. *Существует гомоморфизм кольца $V^{(b)}$, который не может быть описан схемой Д. А. Райкова.*

Действительно, в силу замечания к теореме 4, формула (56) определяет гомоморфизм кольца $V^{(b)}$, причем подкольцо мер σ, для которых соответствующий обобщенный характер почти всюду отличен от нуля (см. теорему 3), совпадает с подкольцом $\mathfrak{R}_H$. В случае гомоморфизма, задаваемого конструкцией Д. А. Райкова, совокупность мер, для которых обобщенный характер отличен от нуля, состоит из мер, сосредоточенных на некоторой регулярной системе $\mathfrak{F}$. Но теорема 5 как раз и дает конструкцию подкольца $\mathfrak{R}_H$, которое никогда не может совпадать с совокупностью мер, сосредоточенных на некоторой регулярной системе множеств.

Существование совершенного множества P с линейно независимыми точками позволит нам также показать, что *кольцо $V^{(b)}$ несимметрично.*

Нормированное кольцо называется симметричным (см. [4]), если каждому элементу кольца σ можно поставить в соответствие элемент σ^* так, что при всех гомоморфизмах кольца элементам σ и σ^* соответствуют сопряженные комплексные числа.

Из этого определения следует, что если бы кольцо $V^{(b)}$ являлось симметричным, то мера σ^*, соответствующая мере σ, определялась бы условием

$$\sigma^*(E)=\overline{\sigma(-E)}. \tag{59}$$

В самом деле, для гомоморфизмов, соответствующих основным* максимальным идеалам, мы имели бы:

$$\int e^{i\lambda t}\, d_t\, \sigma^* = \overline{\int e^{i\lambda t}\, d_t\, \sigma}. \tag{60}$$

Но значения элемента кольца σ на основных максимальных идеалах полностью определяют этот элемент. (Это вытекает из теоремы о том, что функция с ограниченным изменением определяется своим преобразованием Фурье-Стильтьеса.) Покажем теперь, что существует гомоморфизм кольца $V^{(b)}$ в тело комплексных чисел, переводящий некоторую меру σ в единицу, а соответствующую ей меру σ^* — в нуль.

Рассмотрим положительную меру σ с полным изменением, равным единице, сосредоточенную на совершенном множестве P с линейно независимыми точками. Обозначим через $\mathfrak{F}$ минимальную регулярную систему множеств, порожденную множеством P. Ясно, что $\sigma \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}$, а гомоморфизм, определенный формулой $M\{\psi\} = \int d\,\psi_{\mathfrak{R}}$, где $\psi_{\mathfrak{R}}$ есть проекция меры ψ на $\mathfrak{R}_{\mathfrak{F}}$, переводит меру σ в единицу. Покажем, что $\sigma^*(E) = \sigma(-E)$ принадлежит идеалу $I_{\mathfrak{F}}$, а следовательно, при гомоморфизмах указанного вида мера σ^* переходит в нуль.

Мера σ^* непрерывна и сосредоточена на множестве $-P$. Следовательно, нам достаточно показать, что множество $-P$ пересекается со всяким множеством из системы $\mathfrak{F}$ не более, чем по счетному множеству точек.

Но для этого достаточно заметить, что множество $-P$ пересекается со всяким множеством вида

$$P + P + \cdots + P + \{t\} = (n)\, P + \{t\}^{**} \tag{61}$$

не более, чем в $n+1$-й точке.

Последнее легко доказывается от противного. Пусть наше утверждение неверно, и мы имеем $n+2$ равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^j + t = -x^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+2), \tag{62}$$

где x_k^j, $x^j \in P$, $x^j \neq x^i$ при $j \neq i$. Отсюда следует совокупность равенств

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^j + x^j = \sum_{k=1}^{n} x_k^i + x^i. \tag{63}$$

Из каждого равенства (63), в силу линейной независимости точек множества P, вытекает, что $x^i = x_k^j$. Заставляя индекс i пробегать $n+1$ значение, мы будем при фиксированном значении j получать

---

* Определение основного идеала см. на стр. 313.

** Сумма $P + P + \cdots + \{t\}$ понимается как арифметическая сумма соответствующих множеств. Символ $\{t\}$ означает множество, состоящее из точки t.

различные точки x_k^j; но всего точек x_k^j имеется n. Таким образом мы приходим к противоречию.

§ 4. Топологические свойства пространства максимальных идеалов

В общей теории нормированных колец устанавливается соответствие между элементами нормированного кольца и функциями на множестве максимальных идеалов этого кольца. Это соответствие задается по правилу:

$$\sigma \to \sigma(M). \tag{64}$$

Значение, принимаемое функцией $\sigma(M)$, соответствующей элементу кольца σ, на максимальном идеале M равно комплексному числу, в которое переходит элемент кольца σ при гомоморфизме, ядром которого служит максимальный идеал M. В случае, когда в нормированном кольце отсутствует радикал, это соответствие является изоморфизмом.

Во множестве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов нормированного кольца можно так ввести бикомпактную топологию, что все функции $\sigma(M)$ оказываются непрерывными*.

Если обобщенный характер $\chi_\sigma(t) \equiv e^{i\lambda}$, то соответствующий максимальный идеал M мы будем называть основным.

Известно, что преобразование Фурье-Стильтьеса полностью определяет меру на прямой. (Для положительных мер это доказано в книге В. И. Гливенко [14].)

Указанное обстоятельство давало повод предположить, что совокупность основных максимальных идеалов является всюду плотной в пространстве всех максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$. Ниже мы покажем, что эта гипотеза неверна.

Определим в кольце $V^{(b)}$ следующим образом операцию инволюции:

$$\sigma^*(E) = \overline{\sigma(-E)}. \tag{65}$$

В силу тождества

$$\overline{\int e^{i\lambda t}\, d_t\sigma} = \int e^{i\lambda t}\, d_t\sigma^*, \tag{66}$$

имеем для всякого основного максимального идеала M:

$$\overline{\sigma(M)} = \sigma^*(M). \tag{67}$$

Но, в силу непрерывности $\sigma(M)$, равенство (67) верно для всех максимальных идеалов, принадлежащих замыканию основных. Однако это равенство не может выполняться для всех максимальных идеалов, так как иначе кольцо $V^{(b)}$ было бы симметрично, что, как мы доказали в предыдущем параграфе, неверно. Следовательно, замыкание множества основных максимальных идеалов не совпадает с множеством всех максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$.

* По поводу всего сказанного выше см. [1].

Это позволяет получить результат, сформулированный, но не доказанный в работе Винера и Питта [15].

Теорема 6. *Существует функция $f(\lambda)$, являющаяся преобразованием Фурье-Стильтьеса некоторой функции с ограниченным изменением и удовлетворяющая условию $|f(\lambda)| \geqslant c > 0$, но такая, что обратная к ней $[f(\lambda)]^{-1}$ не является преобразованием Фурье-Стильтьеса ни для какой функции с ограниченным изменением.*

Доказательство. Мы сейчас построим функцию $f(\lambda)$, удовлетворяющую условиям теоремы.

Обозначим через $\sigma(E)$ положительную меру, сосредоточенную на совершенном множестве с линейно независимыми точками и имеющую полное изменение, равное единице. Рассмотрим преобразование Фурье-Стильтьеса меры $i(\sigma - \sigma^*)$:

$$g(\lambda) = i \int e^{i\lambda t} d_t(\sigma - \sigma^*). \tag{68}$$

Положим

$$f(\lambda) = g(\lambda) - i. \tag{69}$$

Покажем, что функция $f(\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы.

В самом деле, эта функция является преобразованием Фурье-Стильтьеса меры $i(\sigma - \sigma^* - e)$, где через e обозначена единичная мера, сосредоточенная в нуле (единица кольца). Так как функция $g(\lambda)$ вещественна, то

$$|f(\lambda)| = \sqrt{1 + |g(\lambda)|^2} \geqslant 1 > 0. \tag{70}$$

Наконец, функция $[f(\lambda)]^{-1}$ не есть преобразование Фурье-Стильтьеса функции с ограниченным изменением, так как элемент $i(\sigma - \sigma^* - e)$ не имеет обратного в кольце $V^{(b)}$. Действительно, нами был построен в конце § 3 гомоморфизм M, для которого $\sigma(M) = 1$, но $\sigma^*(M) = 0$. Следовательно,

$$(\sigma - \sigma^* - e)(M) = 1 - 1 = 0, \tag{71}$$

т. е. мера $\sigma - \sigma^* - e$ принадлежит этому максимальному идеалу, а следовательно, элемент $\sigma - \sigma^* - e$ не может иметь обратного в кольце.

Теорема доказана.

Следующая естественная гипотеза состоит в том, что в кольце $V^{(b)}$ основные максимальные идеалы образуют границу множества всех максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$.

Напомним, что границей множества максимальных идеалов $\mathfrak{M}$ некоторого нормированного кольца называется такое замкнутое множество $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$, что всякая функция $\sigma(M)$ из этого кольца достигает своего максимума модуля на множестве $\mathfrak{F}$ и никакое его замкнутое истинное подмножество $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$ уже не обладает этим свойством. Г. Е. Шилов, впервые введший это понятие, доказал (см. [1]), что во всяком нормированном кольце существует единственная граница (например, в случае кольца функций, аналитических внутри единичного круга и непрерывных на его окружности, граница состоит из точек этой окружности).

Оказывается, что тем не менее замыкание основных максимальных идеалов не образует границы множества $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$.

В дальнейшем мы рассматриваем симметричные совершенные множества, получаемые следующей конструкцией. Через Δ_0 мы обозначаем сегмент $[0,1]$ и выкидываем из него расположенный симметрично относительно середины интервал так, что остаются два сегмента одинаковой длины: $[0, \xi] = \Delta_1^1$ и $[1-\xi, 1] = \Delta_1^2$. Пусть уже построено 2^n сегментов равной длины Δ_n^j. Тогда в каждом из них выбросим по одинаковому интервалу, симметрично расположенному относительно середины соответствующего сегмента Δ_n^j; таким образом, у нас получится 2^{n+1} конгруэнтных сегментов Δ_{n+1}^k. Пересечение $P = \bigcap_n (\bigcup_j \Delta_n^j)$ является, очевидно, совершенным множеством.

Лемма 5. *Если отношение длин сегментов* $\lambda_n = \dfrac{\operatorname{mes} \Delta_{n+1}^j}{\operatorname{mes} \Delta_n^k} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то совершенное множество P не является базисом**.

Доказательство. Мы покажем, что m-кратная арифметическая сумма множества P с самим собой имеет нулевую меру Лебега, т. е. заведомо не содержит отрезка. Арифметическая сумма множеств $P + P + \cdots + P$ (m-кратно) содержится в m-кратной арифметической сумме множества $P_n = \bigcup_j \Delta_n^j$ с собою. Последняя арифметическая сумма есть теоретико-множественная сумма арифметических сумм $\Delta_n^{j_1} + \Delta_n^{j_2} + \cdots + \Delta_n^{j_m}$, когда $j_1, j_2, \ldots, j_m$ независимо друг от друга пробегают все 2^n допустимых значений. Таких теоретико-множественных слагаемых имеется 2^{nm}. Следовательно, мера μ_n^m множества $P_n + P_n + \cdots + P_n$ (m раз) не превосходит

$$2^{nm} \max \{\operatorname{mes} (\Delta_n^{j_1} + \Delta_n^{j_2} + \cdots + \Delta_n^{j_m})\} \leqslant 2^{nm} m \operatorname{mes} \Delta_n^j. \qquad (72)$$

Из условий леммы следует, что

$$\operatorname{mes} \Delta_n^j = \frac{\operatorname{mes} \Delta_1^1 \cdot \operatorname{mes} \Delta_2^1 \cdots \operatorname{mes} \Delta_n^1}{\operatorname{mes} \Delta_0^1 \cdot \operatorname{mes} \Delta_1^1 \cdots \operatorname{mes} \Delta_{n-1}^1} = o(2^{-\beta n}) \qquad (73)$$

при любом значении $\beta > 0$.

Согласно формуле (73), можно для всякого $\varepsilon > 0$ выбрать число n так, чтобы $\operatorname{mes} \Delta_n^j \leqslant \varepsilon 2^{-nm} m^{-1}$. Подставляя полученную оценку в неравенство (72), получаем, что для всякого целого m и числа $\varepsilon > 0$ существует такое n, что $\mu_n^m < \varepsilon$; следовательно, и мера множества $P + P + \cdots + P$ (m раз) меньше, чем ε, т. е., в силу произвола в выборе ε, эта мера равна нулю.

Лемма доказана.

---

* Определение базиса см. у А. Зигмунда [12].

Теорема 7. *Замыкание множества основных максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$ не образует границы пространства максимальных идеалов этого кольца.*

Доказательство. Нам достаточно построить максимальный идеал M_0 и меру σ_0 так, чтобы выполнялись условия

$$\sigma_0(M_0) = 1 \tag{74}$$

и

$$\left| \int e^{i\lambda t} d_t \sigma_0 \right| \leqslant \frac{1}{2} \tag{75}$$

для всех вещественных λ.

Салем (R. Salem) доказал [13], что существует симметричное совершенное множество P, такое, что отношение длины одного сегмента $n+1$-го ранга к длине сегмента n-го ранга стремится к нулю и на P сосредоточена некоторая мера σ, имеющая коэффициенты Фурье-Стильтьеса, стремящиеся к нулю. Так как, согласно доказанной лемме, множество P не является базисом, то существует регулярная система множеств (см. определение регулярной системы в § 3), содержащая множество P, но не содержащая множеств, имеющих положительную меру Лебега. (Такая регулярная система может быть получена следующим образом: берется множество P, потом его всевозможные сдвиги, затем присоединяются арифметические суммы полученных множеств и, наконец, все подмножества типа F_σ.) По этой регулярной системе можно построить максимальный идеал M_0, содержащий все абсолютно непрерывные (в обычном смысле, т. е. относительно меры Лебега) меры и такой, что $\sigma(M_0) = c \neq 0$.

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \frac{1}{c} \int e^{i\lambda t} d_t \sigma. \tag{76}$$

При $\lambda \to \infty$ эта функция стремится к нулю. Из общей теории нормированных колец можно получить, что всякая такая функция может быть равномерно приближена с любой степенью точности функцией, являющейся преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции *:

$$\left| f(\lambda) - \int e^{i\lambda t} g(t)\, dt \right| < \varepsilon. \tag{77}$$

* Этот факт можно доказать следующим образом:

Рассмотрим кольцо $\mathfrak{L}$ абсолютно интегрируемых функций с умножением, определенным как свертка

$$g_1 * g_2(t) = \int g_1(t-s)\, g_2(s)\, ds,$$

с присоединенной единицей. Это кольцо симметрично, и его максимальные идеалы состоят из функций, для которых преобразование Фурье равно нулю в некоторой точке; кроме того, имеется максимальный идеал, состоящий из всех абсолютно интегрируемых функций. Функции $f(\lambda)$, имеющие предел при $\lambda \to \infty$, суть непрерывные функции на множестве максимальных идеалов кольца $\mathfrak{L}$, следовательно, они могут быть равномерно приближены функциями из кольца.

Выберем $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и функцию $g(t)$, удовлетворяющую неравенству (77). Рассмотрим, далее, меру $\sigma_1(E) = \int_E g(t)\,dt$ и определим меру σ_0 как разность:

$$\sigma_0 = \frac{1}{c}\,\sigma - \sigma_1. \tag{78}$$

Мера σ_0 удовлетворяет поставленным условиям.

В самом деле, так как идеал M_0 содержит все абсолютно непрерывные функции, то

$$\sigma_0(M_0) = \frac{1}{c}\,\sigma(M_0) = 1. \tag{79}$$

С другой стороны, согласно соотношению (78), имеем:

$$\left|\int e^{i\lambda t}\, d_t\sigma_0\right| = \left|f(\lambda) - \int e^{i\lambda t} g(t)\,dt\right| < \frac{1}{2}. \tag{80}$$

Следовательно, и для всякого максимального идеала M, принадлежащего замыканию основных максимальных идеалов, имеем:

$$|\,\sigma_0(M)\,| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{81}$$

Стало быть, максимум модуля функции $\sigma_0(M)$ не достигается на замыкании множества основных максимальных идеалов.

Заметим, что мы вдобавок получили еще одно доказательство того факта, что замыкание множества основных максимальных идеалов кольца $V^{(b)}$ не содержит всех максимальных идеалов этого кольца.

(Поступило в редакцию 29/VI 1948 г.)

Литература

1. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, Успехи матем. наук, т. **1**, в. **2** (**12**) (1946), 48—146.
2. И. М. Гельфанд, Нормированные кольца, Мат. сб., **9** (**51**) (1941), 3—23.
3. Д. А. Райков, Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, **XIV** (1945).
4. Д. А. Райков, К теории нормированных колец с инволюцией, ДАН СССР, **IV**, № **5** (1946), 391—394.
5. А. П. Артеменко, Общий вид линейного функционала в пространстве функций ограниченной вариации, Мат. сб., **6** (**48**) (1938), 215—219.
6. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М.—Л., 1938.
7. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937.
8. А. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных, М.—Л., 1934.
9. С. Сакс, Теория интеграла, Москва, 1949.

10. Ю. А. Шрейдер, Строение максимальных идеалов в кольцах вполне аддитивных мер, ДАН СССР, **LXIII**, № **4** (1948), 359 — 361.
11. M. Krein and D. Milman, On extreme points of regular convex sets, Studia Math., **IX** (**I**) (1940), 133 — 138.
12. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.
13. R. Salem, Sets of Uniqueness and Sets of Multiplicity, Trans. Amer. Math. Soc., **54** (1943), 215 — 228.
14. В. И. Гливенко, Курс теории вероятностей, М.—Л., 1939.
15. N. Wiener and H. Pitt, On absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms, Duke Math. Journ., **4** (1938), 420 — 430.
16. Ю. Ї. Гросберг, Про лінійні функціонали на просторі функцій обмеженої варіації, Наукові записки Київського педінституту, т. **1** (1939), 17 — 23.
17. J. v. Neumann, Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen, Math. Ann., **99** (1928), 134 — 141.